

**Задания для дистанционного обучения**  
по дисциплине «Математика»  
для студентов заочной формы обучения ГПОУ «САТ»  
группы ТО3-21.9

специальность **23.02.07 «Техническое обслуживание и ремонт двигателей,  
систем и агрегатов автомобилей»**

**Преподаватель:** Зырянова Елена Алексеевна, [ea\\_71@rambler.ru](mailto:ea_71@rambler.ru)

2020/2021 учебный год

**Темы:**

- 1. Дифференциальное исчисление.**
- 2. Интегральное исчисление.**

**Порядок выполнения:**

1. Внимательно изучить теоретический материал согласно методическим рекомендациям;
2. Очень аккуратно и подробно решить предложенные задания на листах А4 или в тетради;
3. Сделать скан выполненных заданий;
4. Оформить титульный лист согласно приложению;
5. Выслать файлы на электронный адрес [ea\\_71@rambler.ru](mailto:ea_71@rambler.ru) с темой в письме: Ваша Фамилия И.О, номер группы

## **Методические рекомендации:**

### **Тема 1: Дифференциальное исчисление.**

Цель: студент должен знать:

1. Понятие производной. Определение производной.
2. Теоремы и правила нахождения производных суммы, разности, произведения и частного.
3. Правило для нахождения производной сложной функции.
4. Формулы для нахождения производных элементарных функций.
5. непрерывность функции, имеющей производную в данной точке
6. понятия точек максимума и минимума, максимума и минимума, экстремумов функции
7. геометрический и физический смысл производной
8. Уравнение касательной и алгоритм его нахождения.
9. Приближенные вычисления.
10. Возрастание и убывание функции, соответствие возрастания и убывания функции знаку производной.

*Уметь:*

1. Вычислять производные элементарных функций, используя справочные материалы.
  2. Исследовать функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа.
  3. Соотносить значения производной функции и ее поведения на числовых промежутках и в точках с поведением самой функции.
- 1) Внимательно просмотрите рекомендуемое видео:  
<https://www.youtube.com/watch?v=gIk3EkrYkTg>  
<https://www.youtube.com/watch?v=uTbIQAGdwXM>
  - 2) Внимательно изучить таблицу производных:

$$1. c' = 0, c = \text{const}$$

$$2. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$16. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$17. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$18. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$19. (\operatorname{th} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

3) Используя теоретический материал из видео и таблицу производных, найти производные функций:

Задания: 1)  $f(x) = 2x - 3$

2)  $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 1$

3)  $f(x) = x^3 + 2$

4)  $f(x) = (3 - 4x)^2$

5)  $f(x) = (x^3 - 2x)^2$

6)  $f(x) = (1 + 2x)(1 - 2x)$

7)  $f(x) = 2 \sin x$

8)  $f(x) = -1/3 \cos (3x + p/4)$

9)  $f(x) = \operatorname{ctg} (2 - 5x)$

10)  $f(x) = 2x^3 - 3 \sin 3x$

11)  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$

$$12) f(x) = \sqrt[4]{x}$$

$$13) f(x) = 5\sqrt[5]{x^3}$$

$$14) f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$$

$$15) f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 3$$

$$16) f(x) = \frac{2\cos x}{x^2 + 4}$$

Выполнить подробное решение данных заданий

## Тема 2. Интегральное исчисление.

### 1. Интеграл: что это?

Интеграл является одним из важнейших понятий математики. Понятие «интеграл» возникло в связи со следующими потребностями:

- отыскание функции по ее производной (например, нахождение функции пути по известной функции скорости);
- измерение различных характеристик объектов (например, площади плоской фигуры и т.д.).

Различают несколько видов интегралов: неопределенный, определенный и несобственный интегралы.

### Интеграл: как вычислить?

Для вычисления большинства интегралов достаточно помнить таблицу интегралов, а также знать основные правила интегрирования. Основная часть таблицы, которая используется наиболее часто, содержит порядка 15 формул, правил интегрирования тоже не так много. Но если уж совсем плохо запоминается, то найти таблицу и правила можно в любом учебнике, в котором рассматривается данная тема.

**Вычисление интеграла состоит из нескольких этапов:**

1. *приведение подынтегральной функции к сумме табличных функций;*
2. *разложение интеграла на сумму табличных интегралов;*
3. *вычисление каждого интеграла по отдельности;*
4. *формирование окончательного решения.*

Это только поначалу кажется сложным, однако при наличии некоторого опыта по вычислению интегралов каждая пара этапов (1 и 2; 3 и 4) интуитивно объединяются в один этап.

При вычислении определенных интегралов основной является формула Ньютона-Лейбница, которую обязательно (!) нужно запомнить:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Между производной и неопределенным интегралом существует взаимосвязь, которую можно выразить следующими равенствами:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

$$(F(x) + C)' = f(x).$$

Следовательно, при умении находить производную функции всегда можно проверить правильность вычисления интеграла.

**Приложение интеграла к решению задач**

Область применения интегралов достаточно широка. Очень часто интегралы используются при решении задач по геометрии, биологии, механике, экономике и т.д.

В зависимости от того, какая задача решается, требуется вычислить либо определенный, либо неопределенный интеграл. Самая простейшая задача на интегралы формулируется следующим образом: вычислить неопределенный (определенный) интеграл. **Пример.** Вычислить определенный

интеграл  $\int_0^2 e^x dx$ .

Как правило, решение задач с интегралами выполняется с использованием некоторой формулы, будь то формула вычисления площади плоской фигуры, длины дуги или какая-то другая формула. Поэтому решение любой задачи с интегралами можно выполнить в три этапа:

- выбор формулы;
- определение пределов интегрирования (если используется определенный интеграл);
- непосредственное вычисление интеграла.

### Приложение интеграла к решению задач в геометрии

Основными формулами при решении задач с интегралами по геометрии являются:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{— длина дуги}$$

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx \quad \text{— объем тела вращения}$$

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx \quad \text{— площадь плоской фигуры}$$

**Пример.** Вычислить объем тела вращения, образованного вращением кривой  $y = x^2$  вокруг оси  $OX$ ,  $x \in [0, 2]$ .

**Решение.** На первом этапе определяется используемая для решения задачи формула. В рассматриваемой задаче все сказано в условии «вычислить объем

тела вращения». Следовательно, используем формулу  $V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$ .

Переходим ко второму этапу решения задачи. Пределы интегрирования также заданы условием задачи ( $x \in [0, 2]$ ), следовательно, остается только подставить все необходимое в формулу.

На третьем этапе необходимо вычислить полученный интеграл, который, кстати, является табличным интегралом.

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^2 = \pi \left( \frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) = \frac{32\pi}{5}$$

### Приложение интеграла к решению задач в механике

Основными формулами при решении задач с интегралами по механике являются:

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad \text{— работа переменной силы}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad \text{— путь, пройденный телом}$$

$$S_x = \gamma \int_a^b x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad \text{— статистический момент}$$

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx} \quad \text{— координата } x \text{ центра тяжести}$$

**Пример.** Тело движется со скоростью  $v(t) = t + 2$  (м/с). Найти путь, который пройдет тело за 2 секунды после начала движения.

**Решение.** На первом этапе определяется необходимая для решения задачи

формула. Из условия задачи видно, что используется формула  $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ .  
 Пределы интегрирования также заданы условием задачи ( $t_1 = 0$  — время начала движения;  $t_2 = 2$  — время завершения движения), следовательно, остается только подставить все необходимое в формулу и вычислить полученный интеграл.

$$S = \int_0^2 (t + 2) dt = \int_0^2 t dt + 2 \int_0^2 dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 + 2t \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} + 2 \cdot (2 - 0) = 6.$$

*Примечание: при вычислении интеграл был приведен к сумме табличных интегралов.*

**Пример.** Тело движется с ускорением  $2 \text{ м/с}^2$ . Найти в общем виде функции, задающие изменение скорости и пройденный путь.

**Решение.** На первом этапе определяется используемая для решения задачи формула. Взаимосвязь между ускорением и скоростью аналогична

взаимосвязи между скоростью и путем. Для определения зависимости пути от времени используется формула  $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ . Для определения же

зависимости скорости от времени формула  $v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$ .

В рассматриваемой задаче нет дополнительных условий, поэтому применяется неопределенный интеграл и пределы интегрирования не нужны. Следовательно, решение задачи сводится к последовательному вычислению двух неопределенных интегралов:

$$v(t) = \int 2 dt = 2 \int dt = 2t + C_1$$

$$s(t) = \int (2t + C_1) dt = 2 \int t dt + C_1 \int dt = 2 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 = t^2 + C_1 t + C_2$$

### Заключение

Как правило, задачи с интегралами в школьном курсе математики и даже в университете имеют вполне стандартную формулировку, а их решение сводится к выбору формулы, определению пределов интегрирования и вычислению составленного интеграла.

Учите теорию и решайте задачи!

### 2) Внимательно просмотрите рекомендуемое видео:

[https://www.youtube.com/watch?v=9WSz\\_2Gtks](https://www.youtube.com/watch?v=9WSz_2Gtks)

<https://www.youtube.com/watch?v=CudiN9GZC58>

<https://www.youtube.com/watch?v=FAE5aj2iPgQ>

<https://www.youtube.com/watch?v=80hjGfSkcMU>

### 3) Внимательно изучите таблицу интегралов, которая упоминалась в видео и которой необходимо пользоваться при решении примеров



1. $\int dx = x + C.$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C.$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, x \neq -1.$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C.$
3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x  + C.$	10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{a} \right) + C.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{x-a}{x+a} \right) + C.$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \left( \frac{x}{a} \right) + C.$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	

4) Еще раз просмотрите примеры:

### Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

**Решение:**

$$\int_1^2 2x^2 dx \stackrel{(1)}{=} 2 \int_1^2 x^2 dx \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{3} (x^3) \Big|_1^2 \stackrel{(3)}{=} \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной

формулы  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ . Появившуюся константу  $\frac{1}{3}$  целесообразно отделить от  $x^3$  и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

Сначала подставляем в  $x^3$  верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

## Пример 2

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x}$$

Это пример для самостоятельного решения, решение и ответ в конце урока.

Немного усложняем задачу:

## Пример 3

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$$

**Решение:**

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &= 8 \int_{-2}^4 dx + 2 \int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx = 8(x) \Big|_{-2}^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-2}^4 = \\ &= 8(4 - (-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3} (4^3 - (-2)^3) = 8 \cdot 6 + (16 - 4) - \frac{1}{3} (64 + 8) = \\ &= 48 + 12 - 24 = 36 \end{aligned}$$

5) Решите примеры:

**Найдите неопределенный интеграл:**

1.  $\int (3x^2 - 6x - 1) dx$
2.  $\int \sin^3 x \cos x dx$
3.  $\int (2x^2 + 3x - 1) dx$
4.  $\int \sin 3x dx$
5.  $\int (5x^2 + x - 2) dx$
6.  $\int \cos 5x dx$
7.  $\int (3x^2 - 14x - 1) dx$
8.  $\int \sin^3 x \cos x dx$
9.  $\int (3x^2 - 12x - 1) dx$
10.  $\int \sin^3 x \cos 3x dx$
11.  $\int (7x^2 + 5x + 1) dx$
12.  $\int (x^2 - 3x - 9) dx$
13.  $\int \cos^3 x \sin x dx$
14.  $\int (2x^2 + 9x + 12) dx$

15.  $\int \frac{dx}{x^2+9}$

16.  $\int (11x^2 - 3x - 1)dx$

**Удачи! И помните, что преподаватель готов помочь Вам.**

## Учебная литература

### Основные источники:

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. - М.: Дрофа- 2010.- 400 с.
2. Богомолов Н.В., Сергиенко Л.Ю. Сборник дидактических заданий по математике. - М.-Дрофа-2009
3. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студентов сред.проф. учреждений / С.Г.
4. Григорьев, С.В. Задулина; под ред. В.А. Гусева. - 2-е изд., стер. - М.: Издательский центр «Академия», 2007. - 384 с.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 573 с.
6. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. - М.: Издательский центр «Академия», 2007. - 352 с.
7. Спирина М.С. Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. -М.: Издательский центр «Академия», 2010. - 368 с.
8. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1 и 2. - М.: Высшая школа, 2008.
9. М.Я. Выгодский Справочник по высшей математике. - М.: Росткнига, 2001.
10. А.А. Дадаян, Математика: /А.А. Дадаян. -2 изд. -М. : Форум, 2010
11. А.А. Дадаян, Сборник задач по математике: учебное пособие /А.А. Дадаян- М. : Форум:Инфа-М, 2008.

### Дополнительные источники:

1. **Н.В. Богомолов** Задачи по математике с решениями. - М.: Высшая школа, 2006
2. **Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко** Математика. - М.: Дрофа, 2004
3. **З.И. Гурова, С.Н. Каролинская, А.П. Осипова** Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами- М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2002
4. **И. Д. Пехлецкий** Математика. - М.: Мастерство, 2001
5. **В.Ф. Бутузов, Н.И. Крутицкая.** Математический анализ в вопросах и задачах. - М.: Физматлит, 2000

### Интернет - ресурсы:

1. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://window.edu.ru/window>, свободный. — Загл. с экрана.
2. Российская национальная библиотека [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [http:// nlr.ru/lawcenter](http://nlr.ru/lawcenter), свободный. — Загл. с экрана.
3. Электронные библиотеки России/pdfучебники студентам [Электронный ресурс].—Режим доступа:  
<http://www.gaudeamus.omskcity.com/mvPDFlibrary.html>, свободный.—Загл. с экрана

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ РЕСПУБЛИКИ КОМИ  
КОМИ РЕСПУБЛИКАСА ВЕЛӦДАН, НАУКА ДА ТОМ ЙӦЗ ПОЛИТИКА МИНИСТЕРСТВО

Государственное профессиональное образовательное учреждение  
«Сыктывкарский автомеханический техникум»

«СЫКТЫВКАРСА АВТОМЕХАНИЧЕСКӦЙ ТЕХНИКУМ»  
УДЖСИКАСӦ ВЕЛӦДАН КАНМУ УЧРЕЖДЕНИЕ

РЕКОМЕНДОВАНА

на заседании предметной

(цикловой) комиссии

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

протокол № \_\_\_\_\_

Председатель ПЦК \_\_\_\_\_ (Петренко О.В.)

УТВЕРЖДАЮ

зам. директора ГПОУ «САТ»

\_\_\_\_\_ Исаченко А.И.

\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Домашняя контрольная работа

По учебной дисциплине Математика

Выполнил студент:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

группы ГЛЗ-23.9

Проверил преподаватель:  
Зырянова Е.А.

*Полный почтовый адрес с индексом:*

*Электронный адрес (если есть):*

*Контактный телефон:*